

## Epreuve de mathématiques Serie C 03H00

### Exercice 1: 10 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points:  
 $A(0, 4, 1)$ ;  $B(1, 3, 0)$ ;  $C(2, -1, -2)$ ;  $E(7, -1, 4)$  et le vecteur  $\vec{u}(2, -1, 3)$

- Montrer que les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ne sont pas colinéaires.
- En déduire que les points  $A, B$  et  $C$  déterminent un plan.
- Démontrer que le vecteur  $\vec{u}$  est orthogonal à chacun des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .
  - Donner une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
  - Vérifier que le point  $E$  n'appartient pas au plan  $(ABC)$
- Soit  $(\Delta)$  la droite passant par le point  $E$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .  
 Soit  $K = \Delta \cap (ABC)$ 
  - Déterminer une représentation paramétrique de  $(\Delta)$ .
  - Justifier que le point  $K$  a pour coordonnées  $(3, 1, -2)$
  - Calculer la distance  $EK$

### Exercice 2: 10 points

On considère l'équation d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$(E) \quad 4x - y = 2$$

- Démontrer que si le couple  $(x_0, y_0)$  est solution de  $(E)$ , alors  $y_0$  est pair.
  - Déterminer les valeurs possibles de  $d = \text{PGCD}(x_0, y_0)$
- Vérifier que le couple  $(1, 2)$  est solution de l'équation  $(E)$  et en déduire l'ensemble de ses solutions.
- Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions de  $(E)$  tels que  $x$  et  $y$  soient premiers entre eux.
- $\overline{ac2^3}$  et  $\overline{baa^4}$  sont deux écritures du **même entier p** respectivement en base 3 et en base 4.
  - Justifier que  $3c + 2$  est multiple de 4.
  - En déduire que  $c = 2$
  - Montrer alors que le couple  $(a, b)$  est solution de  $(E)$
  - En déduire les valeurs de  $a$  et  $b$  et écrire  $p$  dans le système décimal.

### Exercice 1: 10 points

Une étudiante en histoire ancienne veut rédiger son mémoire de Master 2. Au cours de ses recherches, elle décide de déterminer l'âge d'un fragment d'os découvert par les archéologues.

L'information dont elle dispose est que le fragment découvert a une teneur en carbone est 14 égale à 70% de celle d'un fragment d'os actuel de même masse pris comme témoin.

Au cours de sa formation, elle a appris que :

- Si  $t$  est l'âge en années de l'os découvert, alors la quantité restante de carbone 14 dans le fragment d'os est une fonction de  $P = P(t)$  de  $t$ .
- La dérivée  $P'$  est égale au produit de  $P$  par l'opposé de la constante radioactive du carbone 14  $\lambda = 1,2444 \times 10^{-4}$
- La quantité  $P_0$  de carbone 14 d'un organisme vivant commence à diminuer à partir de la mort de cet organisme

N'ayant pas suffisamment de connaissances pour exploiter ces données, elle te sollicite.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, apporter une réponse à la préoccupation de l'étudiante.

## Problème: 20 points

- I. 1. Pour tout  $x < 0$ , on pose  $u(x) = x + 1 - e^{-x}$ .
- Étudier les variations de  $u$
  - En déduire que pour tout  $x < 0$ ,  $u(x) < 0$
2. Pour tout  $x > 0$ , on pose  $v(x) = x - 1 - \ln x$ .
- Dresser le tableau des variations de  $v$
  - En déduire le signe de  $v(x)$  pour  $x > 0$

II. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
  - Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x - 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$
  - Préciser la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $(D)$  sur  $] -\infty, 0[$
- Étudier la continuité de  $f$  en 0
  - Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
- Montrer que pour tout  $x < 0$ ,  $f'(x) = e^x u(x)$ .  
En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $] -\infty, 0[$
  - Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ .
  - Dresser son tableau de variation de  $f$
- Tracer  $(D)$  et  $\mathcal{C}_f$  dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- Soit  $\lambda$  un réel strictement négatif.
  - Exprimer l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan délimitée par les droites d'équations  $x = \lambda$ ,  $x = 0$ ,  $y = -x - 1$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$
  - En déduire la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $-\infty$ .